

Chapitre 4, livre 4^{ème} : Calcul littéral – Equations

Données et réponses

Réduire une expression

2 Réduire les expressions suivantes :

$$B = 2,5y - 6 - 3,5y + 4 = -y - 2$$

$$C = -2a + 3b + 5a - 7b = 3a - 4b$$

3 Réduire les expressions suivantes :

$$E = \frac{5}{7}y + \frac{9}{7}y = \frac{14}{7}y = 2y$$

$$F = \frac{7}{30}z - \frac{4}{15}z + \frac{9}{30}z = \frac{7-8+9}{30}z = \frac{8}{30}z = \frac{4}{15}z$$

4 Réduire les expressions suivantes :

$$d) 9x^2 + x + x^2 + 5x = 10x^2 + 6x$$

$$e) 5x^2 + 3x - 7 - 2x^2 - 4x + 6 = 3x^2 - x - 1$$

5 Calculer le plus simplement possible

$$c) 3,4 + (6 - 5,81) - (3,4 - 5,81) = 3,4 + 6 - 5,81 - 3,4 + 5,81 = 6$$

$$d) -\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) - \left(-\frac{9}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{-2-1}{3} - \frac{4-9}{5} = -1 + 1 = 0$$

7 Réduire les expressions suivantes :

$$C = -18 - (x - 9) - (-8 - x) = -18 - x + 9 + 8 + x = -1$$

$$D = \frac{9}{7}x - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{7}x\right) + \frac{5}{3} = \frac{9}{7}x - \frac{2}{3} + \frac{2}{7}x + \frac{5}{3} = \frac{11}{7}x - \frac{3}{3} = \frac{11}{7}x - 1$$

8 Réduire les expressions suivantes :

$$F = 3y^2 - (2y - 7) - (-y^2 + 5y - 6) = 3y^2 - 2y + 7 + y^2 - 5y + 6 = 4y^2 - 7y + 13$$

$$G = -(z^2 + 2 - 4z) + (2z^2 - 4z + 1) = -z^2 - 2 + 4z + 2z^2 - 4z + 1 = z^2 - 1$$

Développer et réduire

12 Développer et réduire :

$$V = 5(x - 1) + 3(x + 1) = 5x - 5 + 3x + 3 = 8x - 2$$

$$W = x - 4(x - 3) + 3(x - 2) = x - 4x + 12 + 3x - 6 = 6$$

13 $A = 6(2x - y) - 3(4x - 5y)$

Calculer *rapidement* la valeur de A pour : $x = \frac{8,79}{0,43}$ et $y = \frac{1}{9}$

Solution : - *d'abord* développer et réduire l'expression littérale,
- *ensuite* remplacer par les valeurs numériques :

$$A = 6(2x - y) - 3(4x - 5y) = 12x - 6y - 12x + 15y = 9y = 9 \times \frac{1}{9} = 1$$

14 Ecrire le plus simplement

$$D = 3b + 5(a + b) - 4(2b - a) = 3b + 5a + 5b - 8b + 4a = 9a$$

$$E = 3(a - b + c) - 7(a - b) + 4(a - c - b) = 3a - 3b + 3c - 7a + 7b + 4a - 4c - 4b = -c$$

15 Développer et réduire :

$$N = \frac{1}{6} \left(\frac{x}{5} - \frac{1}{12} \right) + \frac{1}{15} \left(5 - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{72} = \frac{x}{30} - \frac{1}{72} + \frac{5}{15} - \frac{x}{30} + \frac{1}{72} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

16 Développer et réduire (attention : remplacer 0,25 par 1/4) :

$$Q = 0,25(2x - 3) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + x \right) = \frac{2x}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{x}{2} = \frac{2x - 2x}{4} - \frac{-3 - 1}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

17 Logique

1° Voici une suite de 6 nombres :

2	3	5	8	13	21
---	---	---	---	----	----

Les 2 premiers sont choisis au hasard, les suivants sont obtenus en ajoutant les deux précédents ($2+3=5$; $3+5=8$; etc.).

Comparer le produit du 5^{ème} nombre par 4 avec la somme des six nombres.

$$4 \times 13 = 52$$

$$2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 = 52$$

2° Compléter la suite ci-dessous, comme dans la question 1, et reprendre la même question.

5,2	8,4	13,6	22,0	35,6	57,6
-----	-----	------	------	------	------

$$4 \times 35,6 = 142,4$$

$$5,2 + 8,4 + 13,6 + 22,0 + 35,6 + 57,6 = 142,4$$

3° Ecrire les autres nombres de la suite ci-dessous en fonction de a et de b (même règle).

a	b	$a + b$	$a + 2b$	$2a + 3b$	$3a + 5b$
---	---	---------	----------	-----------	-----------

Peut-on affirmer que la somme des six nombres est toujours égale au quadruple du cinquième nombre ?

Réponse : oui, car, quelque soit la valeur de a et de b , les 2 équations sont identiques :

$$4 \times (2a + 3b) = 8a + 12b$$

$$a + b + (a + b) + (a + 2b) + (2a + 3b) + (3a + 5b) = 8a + 12b$$

Expressions de la forme $(a+b)(c+d)$

Dans les exercices **18** à **25**, il s'agit de développer les produits proposés et de réduire si cela est possible.

$$18) \quad C = (x + 3)(x + 7) = x^2 + 7x + 3x + 21 = x^2 + 10x + 21$$

$$18) \quad D = (y + 2)(y + 5) = y^2 + 5y + 2y + 10 = y^2 + 7y + 10$$

$$19) \quad G = (a + 1)(a - 2) = a^2 - 2a + a - 2 = a^2 - a - 2$$

$$19) \quad H = (b - 3)(b + 3) = b^2 + 3b - 3b - 9 = b^2 - 9$$

$$20) \quad K = (2 - t)(2t - 3) = 4t - 6 - 2t^2 + 3t = -2t^2 + 7t - 6$$

$$20) \quad L = (u - 5)^2 = (u - 5)(u - 5) = u^2 - 5u - 5u + 25 = u^2 - 10u + 25$$

$$21) \quad P = (7 - 5a)(2b + 3) = 14b + 21 - 10ab - 15a$$

$$21) \quad Q = (3y + 1)(3y - 1) = 9y^2 - 3y + 3y - 1 = 9y^2 - 1$$

$$22) \quad S = 8x(5 + x) - (4x - 7)(2x + 3) = 40x + 8x^2 - 8x^2 - 12x + 14x + 21 = 42x + 21$$

$$23) \quad U = \left(1 + \frac{a}{2}\right)\left(1 - \frac{a}{2}\right) = 1 - \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} = 1 - \frac{a^2}{4}$$

$$24) \quad W = \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = \left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = x^2 + \frac{2x}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{4}{9} = x^2 + \frac{4x}{3} + \frac{4}{9}$$

$$25) \quad Y = \left(\frac{y}{3} - \frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5} + \frac{y}{3}\right) = \left(\frac{y}{3} - \frac{2}{5}\right)\left(\frac{y}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{y^2}{9} + \frac{2x}{15} - \frac{2y}{15} - \frac{4}{25} = \frac{y^2}{9} - \frac{4}{25}$$

Valeur numérique d'une expression littérale

- 28 Calculer le plus simplement possible, pour $x=5$ et $y=-3$, la valeur numérique des expressions suivantes :

$$A = 9 - (-3 + x) + (x - y) + (y - 3) = 9 + 3 - x + x - y + x - 3 = 9$$

$$B = 19 - (x - 13 + y) + (-13 + y) = 19 - x + 13 - y - 13 + y = 19 - x = 19 - 5 = 14$$

$$C = 29 - (23 - x - y) - (x - 23) = 29 - 23 + x + y - x + 23 = 29 + y = 29 - 3 = 26$$

- 30 Soit $A = x - y$, $B = z - y$ et $C = x - z$

- 1° Calculer A , B et C pour $x = 1$, $y = 2$, et $z = 3$.

$$A = x - y = 1 - 2 = -1$$

$$B = z - y = 3 - 2 = 1$$

$$C = x - z = 1 - 3 = -2$$

Que dire de l'expression $A - B - C$?

$$A - B - C = -1 - 1 + 2 = 0$$

- 2° Même question avec $x = -4$, $y = 6$, et $z = 5$.

$$A = x - y = -4 - 6 = -10$$

$$B = z - y = 5 - 6 = -1$$

$$C = x - z = -4 - 5 = -9$$

$$A - B - C = -10 + 1 + 9 = 0$$

- 3° Comment expliquer que la valeur obtenue pour l'expression $A - B - C$ soit toujours la même, quelles que soient les valeurs de x , y et z ?

Effectuer le calcul littéralement (développer et réduire) :

$$A - B - C = (x - y) - (z - y) - (x - z) = x - y - z + y - x + z = 0$$

- 32 $G = 4n + n^3$ $H = 2n^3 - 5n^2$

- a) Calculer G pour $n = 0$, puis pour $n = 3$.

$$\text{pour } n = 0, \quad G = 4 \times 0 + 0^3 = 0$$

$$\text{pour } n = 3, \quad G = 4 \times 3 + 3^3 = 12 + 27 = 39$$

- b) Calculer H pour $n = 1$, puis pour $n = 2$.

$$\text{pour } n = 1, \quad H = 2 \times 1^3 - 5 \times 1^2 = 2 - 5 = -3$$

$$\text{pour } n = 2, \quad H = 2 \times 2^3 - 5 \times 2^2 = 16 - 20 = -4$$

34 $K = y^2 - y + 1$ $L = 3y^2 - y - 1$

a) Calculer K pour $y = \frac{1}{2}$, puis $y = -\frac{1}{2}$

pour $y = \frac{1}{2}$, $K = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1-2+4}{4} = \frac{3}{4}$

pour $y = -\frac{1}{2}$, $K = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1+2+4}{4} = \frac{7}{4}$

b) Calculer L pour $y = \frac{1}{3}$, puis $y = -\frac{1}{3}$

pour $y = \frac{1}{3}$, $L = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} - 1 = 3 \times \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 1 = \frac{3-3-9}{9} = -\frac{9}{9} = -1$

pour $y = -\frac{1}{3}$, $L = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} - 1 = 3 \times \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{3+3-9}{9} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$

36 Donner la valeur numérique des expressions M , N , P et Q sachant que $ab = -6$ et $a + b = 1$

$$M = (a+1)(b+1) = ab + (a+b) + 1 = -6 + 1 + 1 = -4$$

$$N = (a+4)(b+4) = ab + 4a + 4b + 16 = ab + 4(a+b) + 16 = -6 + 4 \times 1 + 16 = 14$$

$$P = (a-1)(b-1) = ab - a - b + 1 = ab - (a+b) + 1 = -6 - 1 + 1 = -6$$

$$Q = (a-5)(b-5) = ab - 5a - 5b + 25 = ab - 5(a+b) + 25 = -6 - 5 \times 1 + 25 = 14$$

38 On a proposé l'exercice :

- Développer et réduire l'expression suivante :

$$R = (2x-3)(x-3) - (10-8x).$$

- Calculer R pour $x = 2$, puis $x = -1$.

Valérie a proposé la solution ci-dessous :

$$R = 2x^2 - 3x - 5x - 9 - 10 - 8x = 2x^2 - 19$$

pour $x = -2$, $R = -3$;

pour $x = -1$, $R = -15$

Rem : Valérie a fait 3 erreurs :

- | | | |
|----|-----|-----------------|
| 1) | -5x | (correct : -6x) |
| 2) | -9 | (correct : +9) |
| 3) | -8x | (correct : +8x) |

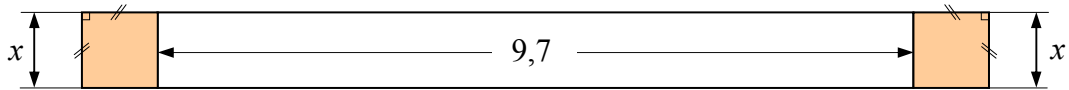
Indiquer les erreurs commises par Valérie, puis rédiger la solution.

$$R = 2x^2 - 6x - 3x + 9 - 10 + 8x = 2x^2 - x - 1$$

pour $x = 2$, $R = 2 \times 2^2 - 2 - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$

pour $x = -1$ $R = 2 \times (-1)^2 + 1 - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$

40



Soit $\mathcal{A}$, l'aire de la figure ci-dessus.

1° Compléter : $\mathcal{A} = 9,7x + 2x^2$

2° Factoriser : $\mathcal{A} = x(9,7 + 2x)$

3° a) A partir des expressions littérales obtenues aux questions 1 et 2, calculer $\mathcal{A}$ pour $x = 0,15$.

1° $\mathcal{A} = 9,7x + 2x^2 = 9,7 \times 0,15 + 2 \times 0,15^2 = ?$

2° $\mathcal{A} = x(9,7 + 2x) = 0,15(9,7 + 2 \times 0,15) = 0,15 \times 10 = 1,5$

3° b) Quelle écriture de $\mathcal{A}$ paraît la plus commode ?
Pourquoi ?

Une expression factorisée est toujours plus simple !!!

« **VRAI OU FAUX ?** » à la page suivante !!!

Vrai ou faux ?

Répondre par Vrai ou Faux à chacune des affirmations suivantes et justifier.

a $x - 1 - (y + x) + y$ est toujours égal à -1 .

b Quels que soient les nombres a , b et c :
 $a + (b - c) - (a - b + c) = 0$.

c L'expression réduite de :
 $4(x + 3) + 5(2 + x) + x$ est $9x + 22$.

d Le développement du produit :
 $(m + 5)(m + 6)$ est $m^2 + 11m + 30$.

e Le développement du produit :
 $(a - 4)(b + 3)$ est $ab + 3a - 4b + 12$.

f Le développement du produit :
 $\left(x - \frac{1}{2}\right)(2y + 6)$ est $2xy - y + 6x - 3$.

g Si $A = x^2 - 5x$ et si $x = -5$, alors $A = 0$.

h L'équation $3x = 7$ a pour solution 4 .

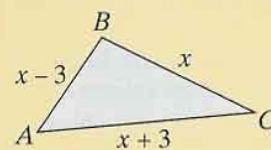
i L'équation $x - 5 = 5 - x$ a pour solution 5 .

j L'équation $2x = 0$ a pour solution -2 .

k Les équations $2x + 3 = -5x$ et $7x = -3$ ont la même solution.

l Les équations $x - 7 = 8 - 3x$ et $\frac{4}{3}x = 5$ ont la même solution.

m Sachant que $x > 3$, la mesure du côté BC est toujours égale au tiers du périmètre.



n Si une boîte et son couvercle pèsent 110 g et si la boîte pèse 100 g de plus que le couvercle, alors le couvercle pèse 10 g.

a) Vrai :
 $x - 1 - y - x + y = -1$

b) Faux :
 $a + b - c - a + b - c = 2b - 2c$

c) Faux :
 $4x + 12 + 10 + 5x + x = 10x + 22$

d) Vrai

e) Faux : $ab + 3a - 4b - 12$

f) Vrai

g) Faux :
 $(-5)^2 - 5 \times (-5) = 25 + 25 = 50$

h) Faux : $x = \frac{7}{3}$

i) Vrai

j) Faux : $x = \frac{0}{2} = 0$

k) Vrai :

$$\begin{aligned} - 2x + 5x &= -3 & \rightarrow x &= -\frac{3}{7} \\ - 7x &= -3 & \rightarrow x &= -\frac{3}{7} \end{aligned}$$

l) Vrai

$$\begin{aligned} - x - 7 &= 8 - 3x & \rightarrow 4x &= 15 \\ - \frac{4}{3}x &= 5 & \rightarrow 4x &= 15 \end{aligned}$$

m) Vrai

$$\begin{aligned} P &= (x - 3) + (x + 3) + x = 3x \\ \text{donc : } BC &= x = \frac{1}{3}P \end{aligned}$$

n) x = couvercle et $x + 100$ = boîte

$$\begin{aligned} \rightarrow x + (x + 100) &= 110g \\ 2x + 100 &= 110 \\ x &= \frac{110 - 100}{2} = 5g \text{ (Faux)} \end{aligned}$$