# 2 Racines carrées

**Vérifier ses acquis**
- fiche 4 p. 293
- fiche 8 p. 296
- fiche 9 p. 297

## *TEST de démarrage*

**Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Laquelle ?**

### 1 Distinguer opposé et inverse

L'opposé de 5 est ...

**a.** $\frac{1}{5}$ **b.** $-\frac{1}{5}$ **c.** $-5$

### 2 Reconnaître un carré

Le nombre qui est égal au carré d'un nombre entier est ...

**a.** $-25$ **b.** 12 **c.** 64

### 3 Calculer le carré d'un nombre négatif

Le carré de $-3$ est égal à ...

**a.** $-6$ **b.** 9 **c.** $-9$

### 4 Calculer le carré d'un quotient

Le carré de $\frac{5}{3}$ est égal à ...

**a.** $\frac{25}{9}$ **b.** $\frac{25}{3}$ **c.** $\frac{10}{6}$

### 5 Respecter les priorités

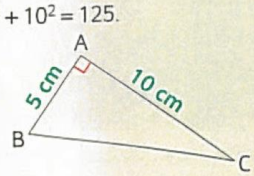
$6 \times 3^2$ est égal à ...

**a.** 54 **b.** 324 **c.** 36

### 6 Distinguer valeur exacte et valeur approchée

Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ donc $BC^2 = 5^2 + 10^2 = 125$.
Alors ...

**a.** $BC = 11{,}18$ cm
**b.** $BC \approx 11{,}2$ cm
**c.** $BC = 11{,}180\,339\,89$ cm




# 1 Racine carrée d'un nombre positif

## a Définition et exemples

**DÉFINITION**

$a$ désigne un nombre **positif**.
**La racine carrée** de $a$ est le nombre **positif** dont le carré est $a$.
Ce nombre est noté $\sqrt{a}$ (lire « racine carrée de $a$ »).

**Remarque :** Le symbole $\sqrt{\ }$ est appelé « radical », il a été introduit en 1525 par l'allemand Christoph Rudolff.

**Exemples 1 : cas où $\sqrt{a}$ est un nombre entier.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| On sait que | $0^2=0$ | $1^2=1$ | $2^2=4$ | $3^2=9$ | $4^2=16$ | $5^2=25$ | $6^2=36$ |
| Donc | $\sqrt{0}=0$ | $\sqrt{1}=1$ | $\sqrt{4}=2$ | $\sqrt{9}=3$ | $\sqrt{16}=4$ | $\sqrt{25}=5$ | $\sqrt{36}=6$ |

**Exemples 2 : cas où $\sqrt{a}$ est un nombre rationnel non entier.**

- $\sqrt{0,25}=0,5$ (car $0,5^2=0,25$).
- $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$ (car $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$).

**Exemples 3 : cas où $\sqrt{a}$ est un nombre irrationnel.**
$\sqrt{2}$ ; $\sqrt{3}$ ; $\sqrt{4,5}$ ... sont des nombres irrationnels.
La touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice permet d'obtenir des valeurs approchées de ces nombres.

## b Propriétés

**PROPRIÉTÉ**

Quel que soit le nombre positif $a$,
$$(\sqrt{a})^2=a.$$

**Démonstration**
Par définition, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est $a$, c'est-à-dire $(\sqrt{a})^2=a$.

**Exemples**
- $(\sqrt{3})^2=3$
- $(\sqrt{12,34})^2=12,34$
- $\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2=\frac{3}{7}$

**PROPRIÉTÉ**

Quel que soit le nombre positif $a$,
$$\sqrt{a^2}=a.$$

**Démonstration**
Par définition, $\sqrt{a^2}$ est **le** nombre positif dont le carré est $a^2$.
Or $a$ est un nombre positif et son carré est $a^2$, donc $\sqrt{a^2}=a$.

**Exemples**
- $\sqrt{6^2}=6$
- $\sqrt{15,3^2}=15,3$
- $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$





# 2 Nombres $x$ tels que $x^2 = a$, avec $a$ nombre positif

**PROPRIÉTÉ**

$a$ désigne un nombre **positif**.
Les nombres $x$ tels que $x^2=a$ sont les nombres $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

**Remarques :**
- Lorsque $a=0$, il n'existe qu'**un** seul nombre tel que $x^2=0$ : c'est 0 (car $\sqrt{0}=-\sqrt{0}=0$).
- Lorsque $a<0$, il n'existe pas de nombre $x$ tel que $x^2=a$.

En effet, $x^2$ est toujours un nombre positif donc $x^2$ ne peut pas être égal au nombre strictement négatif $a$.

**Exemples**
- Les nombres $x$ tels que $x^2=1,44$ sont $\sqrt{1,44}$ et $-\sqrt{1,44}$, c'est-à-dire 1,2 et −1,2.
- Les nombres $x$ tels que $x^2=10$ sont $\sqrt{10}$ et $-\sqrt{10}$.

# 3 Racines carrées et opérations

## a Multiplication et division

**PROPRIÉTÉ**

**Le produit des racines carrées** de deux nombres positifs est égal à **la racine carrée de leur produit**.
Ainsi, quels que soient les nombres positifs $a$ et $b$ :
$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{a\,b}.$$
Et donc aussi $\sqrt{a\,b}=\sqrt{a}\sqrt{b}$.

**Démonstration**
$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2=a\,b$.
Or, par définition de la racine carrée, $\sqrt{a\,b}$ est **le seul** nombre positif dont le carré est $a\,b$.
Donc $\sqrt{a\,b}=\sqrt{a}\sqrt{b}$.

**Exemples :**
- $\sqrt{3}\times\sqrt{8}=\sqrt{3\times 8}=\sqrt{24}$
- $\sqrt{6}=\sqrt{2\times 3}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}$

**PROPRIÉTÉ**

**Le quotient des racines carrées** de deux nombres positifs est égal à **la racine carrée de leur quotient**. Ainsi, quels que soient les nombres positifs $a$ et $b$, avec $b \neq 0$ :
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$
Et donc aussi $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

**Exemples :**
- $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{10}{5}}=\sqrt{2}$
- $\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

## b Addition et soustraction

**Attention !** Les propriétés précédentes ne s'étendent pas à l'addition et la soustraction.

**Exemples**
- $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ et $\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$ donc $\sqrt{16+9}\neq\sqrt{16}+\sqrt{9}$.
- $\sqrt{225-144}=\sqrt{81}=9$ et $\sqrt{225}-\sqrt{144}=25-12=13$ donc $\sqrt{225-144}\neq\sqrt{225}-\sqrt{144}$.

## 1 Écrire un nombre $a\sqrt{b}$ sous la forme $\sqrt{c}$

**ÉNONCÉ**

Écrire le nombre $5\sqrt{3}$ sous la forme $\sqrt{c}$ avec $c$ nombre entier positif.

**SOLUTION**

$$5\sqrt{3} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{3}$$
$$= \sqrt{25} \times \sqrt{3}$$
$$= \sqrt{25 \times 3}$$
$$= \sqrt{75}$$

On utilise la propriété $a = \sqrt{a^2}$ avec $a = 5$.

On sait qu'« un produit de racines carrées est égal à la racine carrée du produit ».

**SUR LE MÊME MODÈLE** *Exercices 47 à 50 page 38*

## 2 Écrire un nombre $\sqrt{c}$ sous la forme $a\sqrt{b}$

**ÉNONCÉ**

Écrire $\sqrt{72}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a$ et $b$ nombres entiers positifs et $b$ le plus petit possible.

**SOLUTION**

1. 36 est le plus grand carré parfait qui divise 72.
2. $72 = 36 \times 2$ c'est-à-dire : $72 = 6^2 \times 2$.
3. Donc $\sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2}$
$= \sqrt{6^2} \times \sqrt{2}$
$= 6\sqrt{2}$

Pour passer de $\sqrt{c}$ à $a\sqrt{b}$ avec $b$ **le plus petit possible** :

1. on cherche le plus grand carré parfait qui divise $c$. Un carré parfait est le carré d'un nombre entier : 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; ... ;
2. on écrit $c = a^2b$ où $a^2$ est **le plus grand carré parfait** trouvé au 1 ;
3. on écrit $\sqrt{c} = \sqrt{a^2b} = \sqrt{a^2}\sqrt{b} = a\sqrt{b}$.

**Remarque :** Les carrés parfaits 4 et 9 divisent aussi 72.
Avec $72 = 4 \times 18$, on obtient $\sqrt{72} = 2\sqrt{18}$.
Avec $72 = 9 \times 8$, on obtient $\sqrt{72} = 3\sqrt{8}$.

**SUR LE MÊME MODÈLE** *Exercices 51 à 53 page 38*



Savoir-faire

## 3 Transformer une écriture du type $\frac{a}{\sqrt{b}}$

**ÉNONCÉ**

Écrire $\frac{2}{\sqrt{3}}$ avec un dénominateur entier.

**SOLUTION**

1. $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$
2. $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$b$ désigne un nombre entier, $b > 0$.
Pour écrire $\frac{a}{\sqrt{b}}$ avec un dénominateur entier :

1. on multiplie numérateur et dénominateur par $\sqrt{b}$ ;
2. on utilise la propriété $\sqrt{b} \times \sqrt{b} = b$ c'est-à-dire $(\sqrt{b})^2 = b$.

**SUR LE MÊME MODÈLE** *Exercices 36 à 38 page 37*

## 4 Réduire, développer

**ÉNONCÉ**

**a.** Réduire la somme $S = -\sqrt{27} + 2\sqrt{75}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a$ et $b$ nombres entiers et $b$ positif le plus petit possible.

**b.** Développer le produit $P = (5 - 3\sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$.

**SOLUTION**

**a.** $S = -\sqrt{27} + 2\sqrt{75}$
$= -\sqrt{9 \times 3} + 2\sqrt{25 \times 3}$
$= -\sqrt{9} \times \sqrt{3} + 2\sqrt{25} \times \sqrt{3}$
$= -3\sqrt{3} + 2 \times 5\sqrt{3}$
$= -3\sqrt{3} + 10\sqrt{3}$
$= (-3 + 10)\sqrt{3}$
$= 7\sqrt{3}$.

- On cherche un diviseur commun à 27 et 75, puis on choisit le plus petit, autre que 1 : ici 3.
- On remarque que les autres facteurs, 9 et 25, sont des carrés parfaits, d'où :
$27 = 3^2 \times 3$ et $75 = 5^2 \times 3$.
- On utilise alors le fait que pour $a > 0$ :
$\sqrt{a^2 \times 3} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{3} = a\sqrt{3}$.

**b.** $P = (5 - 3\sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$
$= 5 \times 3 + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \times 3 - 3\sqrt{2}\sqrt{2}$
$= 15 + 5\sqrt{2} - 9\sqrt{2} - 6$
$= 15 - 6 + 5\sqrt{2} - 9\sqrt{2}$
$= 9 - 4\sqrt{2}$

- On utilise le développement de :
$(a + b)(c + d)$.
- $3\sqrt{2} \times 3 = 3 \times 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$ ;
$3\sqrt{2}\sqrt{2} = 3 \times 2 = 6$.
- $5\sqrt{2} - 9\sqrt{2} = (5 - 9)\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$.

**SUR LE MÊME MODÈLE** *Exercices 59 à 62, 68 et 69 pages 38-39*

## EXERCICES DE BASE

### Racine carrée d'un nombre positif

**1** Recopier et compléter par les expressions : « le carré », « la racine carrée ».
**a.** 9 est ...... de 3 donc 3 est ...... de 9.
**b.** 2 est ...... de 4 donc 4 est ...... de 2.

**2** Recopier et compléter les phrases suivantes.
**a.** 81 est le carré de ...... ; la racine carrée de 81 est ......
**b.** ...... est le carré de 1,5 ; la racine carrée de ...... est 1,5.

**3** Dire si la racine carrée du nombre indiqué existe ou n'existe pas.
**a.** 256 **b.** 15 **c.** – 36

**4** Calculer **mentalement**.
**a.** $\sqrt{49}$ **b.** $\sqrt{81}$ **c.** $\sqrt{4}$ **d.** $\sqrt{64}$
**e.** $\sqrt{0,49}$ **f.** $\sqrt{8\,100}$ **g.** $\sqrt{0,04}$ **h.** $\sqrt{0,64}$

**5** Exprimer **mentalement** avec une fraction.
**a.** $\sqrt{\frac{1}{4}}$ **b.** $\frac{\sqrt{1}}{4}$ **c.** $\sqrt{\frac{121}{36}}$ **d.** $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{36}}$

**6** Avec la touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice, déterminer l'arrondi au centième de :
**a.** $\sqrt{3}$ ; **b.** $\sqrt{4,7}$ ; **c.** $\sqrt{9,5}$ ; **d.** $\sqrt{108}$.

**7** Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au dixième, de la longueur en cm du côté d'un carré d'aire 50 cm².

**8** ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 9,4 cm et AC = 3,2 cm.
**a.** Avec le théorème de Pythagore, donner la valeur exacte de la longueur BC en cm.
**b.** Donner l'arrondi au dixième de BC.

**9** Quelle est l'aire d'un carré de côté :
**a.** $\sqrt{5}$ cm ? **b.** $\sqrt{7,4}$ cm ?

**10** Calculer sans utiliser la calculatrice.
**a.** $(\sqrt{2})^2$ **b.** $(\sqrt{2,85})^2$ **c.** $(\sqrt{31})^2$

**11** Calculer sans utiliser la calculatrice.
**a.** $\sqrt{7^2}$ **b.** $\sqrt{1,5^2}$ **c.** $\sqrt{10^2}$

### Nombres x tels que $x^2 = a$

**12** Trouver tous les nombres $x$ tels que :
**a.** $x^2 = 9$ ; **b.** $x^2 = 0$ ; **c.** $x^2 = 1,21$ ;
**d.** $x^2 = 5$ ; **e.** $x^2 = 2$ ; **f.** $x^2 = 169$.

**13** Donner, si possible, les valeurs exactes de tous les nombres $x$ tels que :
**a.** $x^2 = 20$ ; **b.** $x^2 = -4$ ; **c.** $x^2 = 0,16$ ;
**d.** $x^2 = -\sqrt{25}$ ; **e.** $x^2 = \frac{36}{25}$ ; **f.** $x^2 = -\frac{1}{9}$.

### Racines carrées et opérations

**14** Écrire sous la forme $\sqrt{a}$, avec $a$ nombre entier positif.
**a.** $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ **b.** $\sqrt{25} \times \sqrt{3}$ **c.** $\sqrt{7} \times \sqrt{13}$

**15** Écrire sous la forme d'un nombre entier.
**a.** $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ **b.** $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$ **c.** $\sqrt{5} \times \sqrt{45}$

**16** Écrire sous la forme $\sqrt{a}\,\sqrt{b}$ avec $a$ et $b$ nombres entiers positifs.
**a.** $\sqrt{10}$ **b.** $\sqrt{15}$ **c.** $\sqrt{42}$

**17** Écrire sous la forme de la racine carrée d'une fraction irréductible.
**a.** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ **b.** $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{8}}$ **c.** $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{14}}$

**18** Écrire sous la forme la plus simple possible.
**a.** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$ **b.** $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ **c.** $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}}$ **d.** $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$

**19** Réduire chaque expression lorsque cela est possible.
**a.** $3\sqrt{2} - 4 + 5\sqrt{2} + 1$ **b.** $\sqrt{7} + 3 + 2 - 6\sqrt{7}$
**c.** $3\sqrt{2} - 5\sqrt{3}$ **d.** $2\sqrt{7} - 2\sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{5}$
**e.** $2\sqrt{3} \times 4\sqrt{3}$ **f.** $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{2}$

**Pour les exercices 20 et 21**
**Développer, puis réduire.**

**20** **a.** $7(2 + \sqrt{5})$ **b.** $\sqrt{2}(\sqrt{2} + 5)$ **c.** $\frac{1}{2}(4 + 2\sqrt{3})$

**21** **a.** $\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ **b.** $2\sqrt{5}(\sqrt{2} + 1)$ **c.** $\sqrt{7}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}\right)$





## EXERCICES D'APPLICATION

### Racine carrée d'un nombre positif

**22** Bastien dit que $\sqrt{5}$ est égal à 2,236 067 977.
Sirine utilise la définition d'une racine carrée et dit que Bastien se trompe. Qui a raison ?

**23** Pour chaque nombre, donner (si possible) son carré, son double, sa racine carrée et sa moitié.
**a.** 25 **b.** 100 **c.** 0,006 4
**d.** 0,01 **e.** $(-3)^2$ **f.** – 16

**24** Dans chaque cas, expliquer pourquoi le résultat est un nombre entier.
**a.** Le carré du double de $\sqrt{3}$.
**b.** Le double du carré de $\sqrt{3}$.
**c.** La moitié de $\sqrt{16}$.
**d.** Le produit du tiers de $\sqrt{5}$ et du triple de $\sqrt{5}$.

**25** **a.** « J'ai pour carré le double de 72 mais je ne suis pas le nombre 12. Qui suis-je ? »
**b.** « Mon carré est le triple de 12 et je n'ai pas de racine carrée. Qui suis-je ? »
**c.** « Je suis l'opposé de la racine carrée de 289. Qui suis-je ? »

**26** On considère l'expression $A = x^2 + 3x - 2$.
Calculer la valeur de A pour :
• $x = \sqrt{2}$ ; • $x = 2\sqrt{3}$.

**27** Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.
**a.** $\sqrt{21^2 + 20^2}$ est un nombre entier supérieur à 35.
**b.** $(5\sqrt{2} - 7)(5\sqrt{2} + 7)$ est un nombre entier.

**28** On note $E = 2\sqrt{5} + 3$ et $F = 2\sqrt{5} - 1$.
Calculer sous la forme la plus simple possible, les valeurs exactes de :
**a.** E + F ; **b.** E – F ; **c.** E × F.

**29** Écrire sous la forme $a + b\sqrt{5}$ où $a$ et $b$ sont deux nombres entiers.
**a.** $(1 - \sqrt{5})(\sqrt{5} + 3)$ **b.** $(3 - 5\sqrt{5}) - (8 + 5\sqrt{5})$
**c.** $(5 - \sqrt{5})(3 + 2\sqrt{5})$ **d.** $(2 - \sqrt{5}) - (1 - 2\sqrt{5})$

**30** Développer et réduire.
**a.** $3\sqrt{3} - 2(1 + \sqrt{3})$ **b.** $2\sqrt{3}(-1 + 2\sqrt{3})$
**c.** $(2\sqrt{2} - 3)(3\sqrt{2} + 7)$ **d.** $(1 + 2\sqrt{3})(2 + 5\sqrt{3})$

**31** ABC est un triangle rectangle en A.
Dans chaque cas, calculer la longueur exacte en cm du troisième côté du triangle ABC.
**a.** AB = 5 cm et AC = 7 cm. **b.** AB = 6 m et BC = 11 m.

**32** Calculer les valeurs exactes du périmètre, en cm, et de l'aire, en cm², d'un rectangle ABCD tel que :
AB = $\sqrt{5}$ cm et BC = $(2 + \sqrt{5})$ cm.

**33** Calculer les valeurs exactes du périmètre, en cm, et de l'aire, en cm², d'un rectangle ABCD tel que :
AB = $(2 + \sqrt{2})$ cm et BC = $(2\sqrt{2} + 3)$ cm.

**34** Dans chaque cas, dire si le triangle ABC est rectangle.
**a.** AB = $\sqrt{3}$ cm ; AC = $2\sqrt{2}$ cm ; BC = $\sqrt{5}$ cm.
**b.** AB = $4\sqrt{2}$ cm ; AC = $2\sqrt{7}$ cm ; BC = $4\sqrt{15}$ cm.

**35** Avec une calculatrice, donner un arrondi au dixième des nombres suivants :
**a.** $\frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{2}}$ ; **b.** $\frac{\sqrt{2 + 5 \times 3}}{2\sqrt{2}}$ ; **c.** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - 1}$.

**36** Écrire $\frac{5}{\sqrt{2}}$ avec un dénominateur entier.
**Conseil :** *se reporter à l'exercice résolu 3, page 33.*

**37** Écrire avec un dénominateur entier.
**a.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$ **b.** $\frac{-7}{\sqrt{7}}$ **c.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

**38** Écrire sans radical au dénominateur.
**a.** $\frac{1 + \sqrt{6}}{\sqrt{6}}$ **b.** $\frac{-5}{6\sqrt{5}}$ **c.** $\frac{-1 + \sqrt{7}}{2\sqrt{7}}$

### Nombres x tels que $x^2 = a$

**39** Trouver, si possible, toutes les valeurs de $x$ telles que :
**a.** $x^2 = 4$ ; **b.** $x^2 = 10$ ; **c.** $x^2 = -5$ ;
**d.** $x^2 = \frac{9}{4}$ ; **e.** $x^2 = -\frac{16}{25}$ ; **f.** $x^2 = \sqrt{4}$.

**Pour les exercices 40 à 42**
**Trouver toutes les valeurs que peut prendre le nombre inconnu.**

**40** a. $x^2+5=54$ b. $t^2-7=74$ c. $u^2+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$

**41** a. $2x^2=18$ b. $\frac{1}{3}y^2=27$ c. $\frac{3}{4}z^2=\frac{4}{3}$

**42** a. $x^2=(2{,}07)^2$ b. $y^2+1=1$ c. $3t^2=\sqrt{9}$

**43** Laïla habite à la Réunion et Alissa habite en Sibérie.
Elles échangent par courriels les carrés des températures relevées dans leur jardin.

| Date | Laïla | Alissa |
|---|---|---|
| 3/11 | 441 | 121 |
| 21/12 | 576 | 225 |
| 8/01 | 625 | 289 |

Quelles sont les températures certainement relevées par chacune d'elles ?

**44** Un disque a une aire de 15 cm². Calculer la valeur exacte de son rayon en cm, puis en donner l'arrondi au mm.

**45** Un disque $\mathcal{D}$ a 2,5 m de rayon.
Calculer la valeur exacte, en m, du rayon du disque dont l'aire est le double de celle du disque $\mathcal{D}$.
En donner l'arrondi au cm.

**46** Une pièce rectangulaire dont la longueur est le double de la largeur a une aire de 12,5 m².
Quelles sont ses dimensions ?

## Racines carrées et opérations

**47** Écrire le nombre $3\sqrt{8}$ sous la forme $\sqrt{c}$, avec $c$ nombre entier positif.
**Conseil :** *se reporter à l'exercice résolu 1, page 32.*

**48** Écrire sous la forme $\sqrt{c}$, avec $c$ nombre entier positif.
a. $7\sqrt{5}$ b. $2\sqrt{3}$ c. $4\sqrt{2}$ d. $6\sqrt{7}$

**49** Écrire sous la forme $\sqrt{c}$, avec $c$ nombre positif.
a. $\frac{\sqrt{48}}{4}$ b. $\frac{\sqrt{50}}{5}$ c. $\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{6}}{2}$

**50** Asma avait à calculer :
a. le triple de $\sqrt{5}$ ;
b. la moitié de $\sqrt{18}$ ;
c. le double du produit de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{7}$.
Voici ses réponses :
a. $\sqrt{45}$ ; b. 9 ; c. $\sqrt{224}$.
Pour chacune de ses réponses, dire si elle est juste ou fausse. Justifier.

**51** Écrire $\sqrt{48}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, avec $a$ et $b$ nombres entiers positifs et $b$ le plus petit possible.
**Conseil :** *se reporter à l'exercice résolu 2, page 32.*

**52** Écrire sous la forme $a\sqrt{3}$, avec $a$ nombre entier.
a. $\sqrt{12}$ b. $\sqrt{27}$ c. $\sqrt{147}$ d. $\sqrt{75}$ e. $\sqrt{192}$

**53** Écrire sous la forme $a\sqrt{5}$, avec $a$ nombre entier.
a. $\sqrt{20}$ b. $\sqrt{45}$ c. $\sqrt{605}$ d. $\sqrt{1\,445}$ e. $\sqrt{405}$

**Pour les exercices 54 à 56**
**Écrire sous une forme plus simple ne faisant intervenir que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ou $\sqrt{6}$.**

**54** a. $\sqrt{50}$ b. $\sqrt{8}$ c. $\sqrt{80}$ d. $\sqrt{150}$

**55** a. $\sqrt{162}$ b. $\sqrt{320}$ c. $\sqrt{200}$ d. $\sqrt{\frac{2}{9}}$

**56** a. $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}}$ b. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}$ c. $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{10}}$ d. $\sqrt{\frac{4}{5}}$

**57** a. Écrire $\sqrt{8}$, $\sqrt{50}$ et $\sqrt{128}$ sous la forme $a\sqrt{2}$, avec $a$ nombre entier.
b. En déduire une écriture simplifiée de :
$$A = 3\sqrt{8} + 2\sqrt{50} - \sqrt{128}.$$

**58** a. Écrire $\sqrt{300}$, $\sqrt{108}$ et $\sqrt{192}$ sous la forme $a\sqrt{3}$, avec $a$ nombre entier.
b. En déduire une écriture simplifiée de :
$$B = \sqrt{300} - \sqrt{108} - \sqrt{192}.$$

**59** On donne $B = \sqrt{12} - 7\sqrt{3} - \sqrt{75}$.
Écrire B sous la forme $a\sqrt{b}$, où $a$ est un entier relatif et $b$ un entier naturel le plus petit possible.
**Conseil :** *se reporter à l'exercice résolu 4, page 33.*

**60** On donne $B = 50\sqrt{45} - 3\sqrt{5} + 6\sqrt{125}$.
Écrire B sous la forme $a\sqrt{5}$, où $a$ est un nombre entier.
Détailler les étapes du calcul.
→ *Brevet 2006*





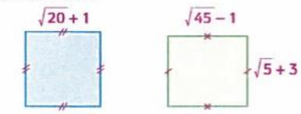
**Pour les exercices 61 et 62**
**Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec $a$ nombre entier relatif et $b$ nombre entier positif le plus petit possible.**

**61** a. $9\sqrt{7} - 2\sqrt{28} - 5\sqrt{63}$ b. $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{150}$

**62** a. $2\sqrt{50} - \sqrt{98} - \sqrt{18}$ b. $3\sqrt{20} + 4\sqrt{45} - \sqrt{80}$

**63** Un rectangle EFGH est tel que :
$EF = (\sqrt{5} + \sqrt{20})$ cm et $FG = (\sqrt{80} - \sqrt{45})$ cm.
Calculer son périmètre, en cm, et présenter la réponse sous la forme $a\sqrt{5}$.

**64** Démontrer que le carré et le rectangle ci-dessous ont le même périmètre.




**65** Calculer la valeur exacte de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 5 cm.
Donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$, avec $a$ nombre rationnel et $b$ nombre entier.

**66** Calculer la valeur exacte de la longueur de la diagonale d'un carré de côté 5 cm.
Donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$, avec $a$ et $b$ nombres entiers.

**67** a. Quelle est la valeur exacte du rayon d'un disque d'aire 1 m² ?
b. Calculer la valeur exacte de son périmètre en la présentant le plus simplement possible.
Comparer ce périmètre à celui d'un carré d'aire 1 m².

**68** Développer et réduire :
$A = (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ et $B = (7 + 2\sqrt{6})(\sqrt{6} - 1)$.
**Conseil :** *se reporter à l'exercice résolu 4, page 33.*

**69** Développer et réduire :
$A = (5 + \sqrt{15})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ et $B = (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{10} - 1)$.

**70** Écrire sans radical au dénominateur sous la forme la plus simple possible.
a. $\sqrt{\frac{4}{3}}$ b. $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{12}}$ c. $\sqrt{\frac{3}{4}}$ d. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{9}}$

**71** MNOP est un rectangle tel que :
$MN = \sqrt{18} - \sqrt{8}$ et $NO = \sqrt{50} - \sqrt{32}$.
Démontrer que MNOP est un carré.
**Conseil :** *se reporter à l'atelier 1, page 34.*

## Synthèse sur les nombres

**72** Alexandre et Fanny décident de faire chacun l'un des calculs suivants :
$A = \frac{5}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{9}{16}$ ; $F = \sqrt{63} + 2\sqrt{7} - 5\sqrt{28}$.
Alexandre calcule A et propose $A = \frac{21}{64}$ ; Fanny calcule F et propose $F = -5\sqrt{7}$.
Ces réponses vous semblent-elles satisfaisantes ? Justifier vos affirmations.
→ *D'après Brevet 2005*
**Conseil :** *se reporter à l'atelier 2, page 35.*

**73** a. On note $A = \frac{1}{4} + \frac{5}{6}$ et $B = \frac{7}{5} - \frac{9}{5} \times \frac{2}{21}$.
Calculer A et B. Donner les réponses sous forme de fractions irréductibles.
b. On note $C = 5 - 3\sqrt{2}$ et $D = 3 + 2\sqrt{2}$.
Calculer C + D, C − D et C × D. Donner les réponses sous la forme $a + b\sqrt{c}$, $c$ étant le plus petit possible.
→ *D'après Brevet 2006*

## Calcul mental et réfléchi

**Pour les exercices 74 et 75**
**Calculer mentalement.**

**74** a. $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ b. $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{5}}$ c. $\frac{\sqrt{20}}{2}$

**75** a. $(2\sqrt{7})^2$ b. $2(\sqrt{7})^2$ c. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$

**76** Encadrer **mentalement**, par deux nombres entiers consécutifs.
a. $\sqrt{31}$ b. $\sqrt{8}$ c. $\sqrt{20{,}08}$ d. $\sqrt{\frac{519}{5}}$

**77** On note $A = \sqrt{27}$ et $B = \sqrt{3}$.
Calculer **mentalement** et présenter le résultat sous la forme d'un nombre entier ou sous la forme $a\sqrt{b}$, avec $a$ et $b$ nombres entiers.
a. A + B b. A − B c. A × B d. $\frac{A}{B}$

## QCM POUR S'ÉVALUER

Pour ces questions, une seule réponse est exacte.

| | a | b | c |
|---|---|---|---|
| **78** La racine carrée de 16 est ... | 8 | 4 | −4 |
| **79** $\sqrt{(-5)^2}$ ... | n'existe pas | est égal à −5 | est égal à 5 |
| **80** $\sqrt{13}$ est un nombre ... | rationnel décimal | rationnel non décimal | irrationnel |
| **81** $(3\sqrt{5})^2$ est égal à ... | 15 | $6\sqrt{10}$ | 45 |
| **82** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ est un nombre ... | entier | rationnel non entier | irrationnel |
| **83** L'égalité $x^2 = 7$ est vraie pour... | deux valeurs distinctes de $x$ | une seule valeur de $x$ | aucune valeur de $x$ |
| **84** L'égalité $y^2 + 4 = 0$ est vraie pour... | deux valeurs distinctes de $y$ | une seule valeur de $y$ | aucune valeur de $y$ |
| **85** $\frac{\sqrt{18}}{5\sqrt{2}}$ est égal à ... | $5\sqrt{9}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{4}{5}$ |
| **86** $\sqrt{20}$ est le double de ... | $\sqrt{10}$ | $\sqrt{5}$ | $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{2}}$ |
| **87** $\sqrt{6^2 + 8^2}$ est égal à ... | 14 | $\sqrt{28}$ | 10 |
| **88** $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ est égal à ... | $\sqrt{10}$ | $3\sqrt{2}$ | $\sqrt{68}$ |
| **89** $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{300}$ est égal à ... | $-3\sqrt{3}$ | $3\sqrt{3}$ | $-3\sqrt{5}$ |
| **90** On note $A = \sqrt{\frac{94 - 27,35}{59}}$. L'arrondi de A au millième est ... | 9,671 | 1,062 | 1,063 |

Pour ces questions, plusieurs réponses sont exactes.

| | a | b | c |
|---|---|---|---|
| **91** $\sqrt{2}$ est la longueur ... | du côté d'un carré d'aire 2 | du côté d'un carré de diagonale 2 | de la diagonale d'un carré de côté 1 |
| **92** Le carré de $\sqrt{5}$ est ... | $\sqrt{25}$ | 5 | $\sqrt{10}$ |
| **93** $\sqrt{4} \times \sqrt{18}$ est égal à ... | $3\sqrt{8}$ | $\sqrt{72}$ | $6\sqrt{2}$ |
| **94** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ est égal à ... | $\sqrt{\frac{1}{3}}$ | $-\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| **95** $\sqrt{32} - \sqrt{2}$ est égal à ... | $\sqrt{30}$ | $3\sqrt{2}$ | $\sqrt{18}$ |
| **96** La hauteur d'un triangle équilatéral de côté 3 cm a pour longueur ... | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm | $\sqrt{\frac{27}{4}}$ cm | 2,598 cm |

Vérifiez vos réponses p. 307.





## OBJECTIF BREVET

### 97 Avec une aide

**a.** Écrire sous forme de fraction irréductible $\frac{325}{1053}$.

**Indication :** *on pourra calculer le PGCD des nombres 1 053 et 325.*

**b.** Déterminer les nombres $x$ tels que $x^2 = \frac{325}{1053}$.

**c.** Calculer $A = \sqrt{1053} - 3\sqrt{325} + 2\sqrt{52}$. On donnera le résultat sous la forme $a\sqrt{13}$ où $a$ est un nombre entier.

→ **Brevet 2000**

**Aide**

**a.** Précisez la méthode et détaillez les calculs.
**b.** Utilisez la réponse du **a.**
**c.** Écrivez 1 053 ; 325 et 52 sous la forme 13 × ...

### Sans aide maintenant

**98** **1. a.** Calculer le PGCD de 854 et 1 610.

**b.** Donner la fraction irréductible égale à $\frac{854}{1\,610}$.

**2.** Calculer le nombre B et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{3}$, où $a$ est un nombre entier relatif :

$$B = -3\sqrt{27} + \sqrt{75} - 2\sqrt{108}.$$

→ **D'après Brevet 2007**

**99** On donne les expressions :

$C = \sqrt{2}\left(\sqrt{2} + 5\sqrt{3}\right)$ et $D = \sqrt{24} + \sqrt{9} + \sqrt{54}$

**a.** Écrire C et D sous la forme $a + b\sqrt{6}$, où $a$ et $b$ sont des nombres entiers.

**b.** Utiliser les résultats de la première question pour comparer C et D.

→ **Brevet 2004**

### 100 Avec une aide

*Dans cet exercice, les longueurs sont exprimées en cm. Répondre aux questions en détaillant les calculs.*

La relation entre la longueur $c$ du côté d'un carré et la longueur $d$ de sa diagonale est donnée par la formule :

$$d = c\sqrt{2}.$$

**1.** La longueur du côté d'un carré est $\sqrt{8} + \sqrt{2}$.

**a.** Montrer que la longueur de sa diagonale est un nombre entier.

**b.** Montrer que l'aire en cm² de ce carré est un nombre entier.

**2.** La longueur de la diagonale d'un autre carré est $\sqrt{40}$. Calculer la longueur de son côté et exprimer cette longueur sous la forme $a\sqrt{5}$, où $a$ est un nombre entier naturel.

→ **Brevet 2005**

**Aide**

Il faut ici utiliser la formule « $d = c\sqrt{2}$ » donnée dans l'énoncé, il n'est pas demandé de la justifier.
**1. a.** Remplacez $c$ par $\sqrt{8} + \sqrt{2}$ dans la formule et développez le produit.
**b.** Développez $(\sqrt{8} + \sqrt{2})(\sqrt{8} + \sqrt{2})$ ou bien écrivez $\sqrt{8} + \sqrt{2}$ sous la forme $a\sqrt{2}$ et élevez au carré ensuite.
**2.** Remplacez $d$ par $\sqrt{40}$ et déduisez-en alors l'expression de $c$.

### Sans aide maintenant

**101** *L'unité de longueur est le cm.*

ABC est un triangle tel que :

$AB = 4\sqrt{5}$ ; $AC = \sqrt{125}$ ; $BC = \sqrt{45}$.

**1. a.** Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

**b.** Calculer le périmètre de ce triangle et présenter la réponse sous la forme $a\sqrt{5}$.

**c.** Calculer l'aire du triangle ABC en cm².

**2.** On considère le cercle circonscrit au triangle ABC.

**a.** Préciser la position de son centre K. Justifier.

**b.** Calculer la longueur du rayon de ce cercle et présenter la réponse sous la forme $\frac{a\sqrt{c}}{b}$, avec $a$, $b$, $c$ nombres entiers.

**3.** D est le point tel que ACBD soit un parallélogramme. On note O le point d'intersection de ses diagonales.

**a.** Démontrer que les droites (BC) et (OK) sont parallèles.

**b.** Calculer la longueur OK.

→ **D'après Brevet 2004**